

УДК 62-501.72:57

**Б.С.Дарховский, д-р физ-мат. наук
(Институт системного анализа РАН),
А.Я.Каплан, д-р биол. наук,
С.Л.Шишкин, канд. биол. наук
(Московский государственный университет им.
М.В.Ломоносова)**

О ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ КРИВЫХ (НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММЫ ЧЕЛОВЕКА)

Предлагается новый подход к оценке "сложности" непрерывной кривой на отрезке. Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, что сложность кривой должна оцениваться относительной долей информации, которая необходима для ее восстановления с заданной точностью по набору значений в конечном числе точек при помощи заданной совокупности методов. Предлагаемый подход иллюстрируется оценкой сложности различных фрагментов электроэнцефалограммы человека (ЭЭГ) и может быть использован, в частности, для макро- и микроструктурного анализа ЭЭГ.

1. Основная идея

Понятие "сложности" (или "простоты") того или иного объекта относится к числу фундаментальных научных понятий. Этой проблемой занимались многие выдающиеся ученые, и имеются многочисленные попытки применить "сложностной" подход к прикладным задачам, в том числе и к анализу электроэнцефалограммы человека (ЭЭГ).

Напомним вкратце основные идеи, связанные с понятием "сложность". По-видимому, впервые количественный подход к понятию "сложность физической системы" появился в статистической физике, когда возникло понятие "энтропия". В равновесной статистической физике под энтропией понимают коэффициент при асимптотике логарифма числа конфигураций, обладающих теми или иными свойствами, когда число степеней свободы системы стремится к бесконечности. Чем больше энтропия, тем "сложнее" система.

В теории информации Шеннона, созданной в 40-е годы, вводится понятие энтропии вероятностных распределений. Устанавливается, что энтропия есть некоторая мера "степени неопределенности", свойственной тому или иному вероятностному распределению, и при естественных

условиях эта мера единственна. Можно показать, что шенноновская энтропия есть коэффициент при асимптотике логарифма числа "типичных" последовательностей независимых случайных величин, имеющих одно и то же данное распределение вероятностей, при увеличении длины последовательности ("типичные" последовательности — это такие последовательности, для которых отклонение частот событий от их вероятностей не превышает заданного малого числа). Вновь можно говорить о том, что вероятностное распределение тем более "сложно", чем больше его энтропия (с этой точки зрения самое "сложное" распределение — равномерное, так как оно имеет максимально большую неопределенность).

Развитая Колмогоровым и Синаем (см., например, [1]) теория динамических систем приводит к понятию энтропии таких систем. По сути, это обобщение шенноновской энтропии на динамические системы. Энтропия динамической системы есть коэффициент при асимптотике логарифма числа различных типов траекторий динамической системы, когда время стремится к бесконечности. И снова энтропия динамической системы может служить мерой ее "сложности": чем "сложнее" система, тем богаче разнообразие ее траекторий.

Понятие энтропии динамической системы (и связанные с энтропией такие "нелинейные характеристики", как корреляционный интеграл, фрактальная размерность, экспонента Ляпунова, см., например, [2]) применяется и в так называемой нелинейной, или "хаотической", динамике. Одна из задач этой науки — восстановление описания динамической системы по ее реализациям. Здесь опять сложность системы отождествляется со сложностью ее описания, т.е., в конечном счете, с энтропией.

В начале 80-х годов Колмогоров [3] предложил новый, алгоритмический, подход к понятию "сложность" объектов. Основная идея этого подхода состоит в том, что "сложный" объект требует для своего описания много информации, а "простой" — мало. Эта идея формализована на языке теории алгоритмов, и сложность, грубо говоря, измеряется длиной программы, приводящей к выделению данного объекта из некоторого множества.

Именно эта идея Колмогорова ближе всего к той, которую мы собираемся здесь изложить. Но прежде чем это сделать, рассмотрим, как используются "сложностные" подходы в анализе ЭЭГ.

ЭЭГ-сигнал, как известно, относится к наиболее сложным физическим сигналам. Это связано, прежде всего, с высокой (и *принципиальной*) нестационарностью ЭЭГ [4]. Вследствие нестационарности ЭЭГ методы, основанные на подгонке различных моделей к уже зафиксиро-

ванной ЭЭГ, *принципиально не годятся* для описания ее новых участков. Феномен нестационарности привел к необходимости предварительной сегментации ЭЭГ на (квази)-стационарные сегменты с тем, чтобы после такой сегментации для каждого сегмента подбирать свою математическую модель. Для целей сегментации предпринимались попытки применить понятие "сложность", чтобы выделять в ЭЭГ-сигнале однородные по "сложности" фрагменты.

Используемые в литературе по анализу ЭЭГ понятия "сложности" базируются на изложенных выше идеях, прежде всего, на энтропии (или близких "нелинейных характеристиках") динамических систем и шенноновской энтропии. Отметим основные дефекты подобных подходов. Базовым предположением нелинейной динамики (теории динамических систем, теории детерминированного хаоса) является предположение о том, что исследуемая динамическая система *стационарна*, т.е. не меняет своих свойств во времени. Именно это предположение лежит в основе современной и весьма развитой математической теории, имеющей многочисленные применения в физике и других областях. Нарушение этого условия делает невозможным применение указанных подходов, но именно *нестационарность* и является едва ли не главным признаком ЭЭГ-сигнала. Отметим здесь, что даже для стационарного случая задача восстановления описания динамической системы по ее наблюдаемым траекториям весьма сложна и в практическом отношении весьма далека от своего решения (рекомендуем читателю ознакомиться с интересной и содержательной статьей [2], где, по-видимому, впервые на достаточно строгом математическом уровне рассмотрены практические аспекты этой проблемы).

Таким образом, попытка применения энтропийных понятий сложности как способа описания динамической системы, генерирующей ЭЭГ-сигнал, на наш взгляд, *априори несостоятельна*. С другой стороны, использование для характеристики ЭЭГ-сигнала классической шенноновской энтропии также, на наш взгляд, не вполне отвечает тем целям, которые можно было бы поставить при работе с таким сигналом. Дело в том, что шенноновская энтропия характеризует сложность распределения вероятностей, или, как выше отмечалось, богатство "типических" траекторий последовательности независимых случайных величин. Даже если отвлечься от проблемы нестационарности, такая характеристика лишь опосредованно может использоваться для того, чтобы измерять "сложность" описания самого сигнала, а именно сложность описания и есть, на наш взгляд, то свойство, которым можно было бы характеризовать различные сегменты ЭЭГ.

Перейдем теперь непосредственно к идее нашего подхода к понятию "сложность ЭЭГ" и, более общо, к понятию "сложность непрерывной кривой". Пусть на отрезке $[0, T]$ задана непрерывная функция (кривая) $x(t)$. Нам хотелось бы поставить в соответствие этой кривой некое число, которое характеризует ее "сложность". Будем исходить из идеи Колмогорова о том, что "сложный" объект требует для своего описания много информации, а "простой" — мало. Выберем число $h > 0$ и рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ точками $\{t_i\}$ на $n = [T/h]$ равных частей (здесь $[a]$ — это целая часть числа a). Предположим, что мы измерили нашу кривую только в точках разбиения t_i . С какой точностью можно восстановить всю кривую по этой информации? Пусть задано некоторое множество \mathcal{F} способов аппроксимации кривой по конечному множеству точек (в идеале это множество *всех известных методов* восстановления кривой по ее значениям в конечном числе точек).

Рассмотрим ошибку аппроксимации

$$\epsilon(h) = \inf_{\mathcal{F}} \|x(t) - \hat{x}(t)\|,$$

где $\hat{x}(t)$ — аппроксимирующая кривая, построенная одним из допустимых способов аппроксимации по n данным точкам, $\|\cdot\|$ — некоторая интегральная норма в функциональном пространстве, а инфимум берется по всему множеству заданных способов аппроксимации.

Ясно, что если $x(t) \equiv \text{const}$, то для ее восстановления достаточно одной точки, иными словами, константа есть наиболее "простая" кривая, что вполне согласуется с интуицией. Поэтому целесообразно исключить константы из множества рассматриваемых кривых, для чего следует провести предварительное центрирование $x(t)$. Далее, для возможности сравнения между собой погрешностей аппроксимации разных кривых надо все их рассматривать в одном масштабе, т.е. провести предварительную нормировку. С этой целью следует, после центрирования, рассматривать нормированную кривую $z(t) = x(t)/\|x(t)\|$ (очевидно, $\|z(t)\| = 1$). После центрирования и нормирования кривой ошибка аппроксимации (интегральная) не превзойдет 1, причем максимальная ошибка достигается, если интервал дискретности $h = T$ (это означает, что мы должны использовать для аппроксимации лишь одну константу, а тогда наилучшей константой будет, из соображений симметрии, нулевая; при этом погрешность окажется равной норме исходной кривой, т.е. 1).

Будем теперь строить график функции $\epsilon(h)$, увеличивая величину h (т.е. уменьшая количество данных n). Понятно, что с ростом h функ-

ция $\epsilon(h)$ должна монотонно расти (ведь увеличение шага дискретности означает, что мы выбрасываем все больше и больше информации о функции и, значит, ее аппроксимация становится все хуже и хуже, если набор методов аппроксимации фиксирован). С учетом сделанных замечаний погрешность $\epsilon(h)$ будет монотонной положительной функцией своего аргумента, достигающей своего максимума, равного 1, при $h = T$. Если теперь задаться неким "приемлемым" (с точки зрения конкретного пользователя) уровнем погрешности аппроксимации $\Delta < 1$, то можно определить, каков тот допустимый объем информации, который может быть выброшен без существенной потери качества восстановления кривой.

Теперь *сложностью* (точнее, $(\Delta, \mathcal{F}^{\|\cdot\|})$ -сложностью) данной конкретной кривой $x(t)$ можно назвать величину $1 - h^*/T$, где $h^* = \min\{h \leq T : \epsilon(h) = \Delta\}$. Иными словами, это *относительная доля информации, которая необходима для восстановления данной кривой с данной точностью заданным набором методов*.

Отметим, что предлагаемая мера сложности есть *индивидуальная характеристика конкретной кривой*, а не некоторого множества кривых, порождаемых неким механизмом, как это получается при использовании энтропии динамических систем. Далее, эта мера никак не связана с возможными механизмами порождения кривой (например, с тем, является ли кривая куском реализации какого-то случайного процесса или траекторией какой-то динамической системы). Это обстоятельство представляется важным, в частности, применительно к ЭЭГ в силу уже высказанных соображений об особенностях этого сигнала. Вообще, предлагаемая мера сложности "настроена" на восприятие пользователя, т.е. прямо учитывает, легко или нет можно работать с дискретными данными о кривой.

З а м е ч а н и е 1.1. Можно было бы попробовать характеризовать сложность кривой ее шенноновской энтропией. А именно, можно разбить ось значений кривой на конечное число интервалов, подсчитать частоты попадания значений кривой в тот или иной интервал и затем по формуле Шеннона подсчитать энтропию полученного частотного распределения. Однако нетрудно построить кривые (например, периодические), у которых энтропия (при фиксированном числе интервалов разбиения оси значений) практически не будет меняться с уменьшением числа дискретных отсчетов (если этих отсчетов все еще достаточно много), так что зависимость такой меры от доли оставшейся информации будет очень слабой. В то же время ошибка аппроксимации должна быть достаточно чувствительной к уменьше-

нию доступной информации, особенно для "сложных" кривых.

З а м е ч а н и е 1.2. Предлагаемая мера сложности, очевидно, зависит от принятой функциональной нормы, от класса \mathcal{F} и от уровня Δ . Может так случиться, что при изменении этих параметров отношение сложности для одной и той же пары кривых изменится на противоположное. Это, однако, на наш взгляд, не является недостатком, так как функциональная норма и уровень Δ есть критерии качества аппроксимации, которые выбрал для себя конкретный пользователь, а класс \mathcal{F} описывает алгоритмические возможности этого пользователя. Более того, для анализа таких сложных кривых как ЭЭГ, важно не конкретное числовое значение сложности, а динамика ее изменений при переходе от одного участка кривой к другому. Именно эта динамика в принципе может дать возможность детектировать важные изменения в ЭЭГ, которые могут означать какие-либо функциональные перестройки. С этой точки зрения наиболее приемлемым для анализа ЭЭГ следует признать такой показатель сложности, который улавливает ее изменение при переходе от одного сегмента ЭЭГ к другому; при этом несущественно числовое выражение показателя для конкретного сегмента, а важна лишь степень его чувствительности к изменению характера кривой.

З а м е ч а н и е 1.3. Возможность подсчитывать сложность кривой на сегменте произвольной длины позволяет исследователю выбирать тот временной масштаб, для которого он хотел бы провести анализ всей наблюдаемой реализации. Появляется возможность исследовать динамику сложности ЭЭГ в разных временных масштабах и, следовательно, анализировать разные структуры этой кривой, которые могут характеризовать разные функциональные состояния мозга.

2. Алгоритм

При практической реализации изложенной выше идеи нужно учитывать, что реализация кривой задается всегда в дискретном времени, т.е. "кривая" представляет собой конечный набор отсчетов (конечномерный вектор). Кроме того, из соображений простоты реализации для первых экспериментов следовало выбрать не слишком богатый класс \mathcal{F} . Далее, как уже отмечалось, все анализируемые кривые нужно привести к одному масштабу.

Дискретность исходной кривой приводит к тому, что зависимость ошибки аппроксимации от количества выброшенных точек не будет мо-

нотонной, если остающихся точек достаточно мало. Поэтому желательно иметь достаточно высокую частоту опроса с тем, чтобы даже при удалении большого процента данных (реально в наших опытах это 70-90%), при котором еще возможна удовлетворительная аппроксимация, дискретность записи кривой мало влияла на монотонность поведения ошибки.

Для приведения кривых к одному масштабу мы использовали центрирование и последующую нормировку (в метрике l_1) конечномерного вектора (кривой), так что в результате получался вектор из соответствующей единичной сферы.

Таким образом, если кривая задавалась вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то первая операция алгоритма состояла в переходе к вектору $y = x - \bar{x}$, где $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$, а вторая операция — в переходе к вектору $z = y/\|y\|$, $\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$.

Погрешность аппроксимации вектора z вектором \hat{z} мы измеряли в той же l_1 -метрике, т.е. $\|z - \hat{z}\| = \sum_{i=1}^n |z_i - \hat{z}_i|$.

Дискретность записи исходной непрерывной кривой приводит к небольшой модификации формулы для сложности. Во-первых, при достаточно большом числе $n^* < n$ оставшихся после выбрасывания точек отношение h/T можно заменить величиной $1/n^*$. Во-вторых, целесообразно считать, что если $n^* = n$ (т.е. нельзя выбросить ни одной точки из исходной записи без существенной потери качества восстановления), то сложность кривой равна 1. С учетом этих замечаний мы использовали для подсчета сложности s кривой формулу

$$s = \frac{1 - 1/n^*}{1 - 1/n},$$

где, напомним, n^* — это число точек, оставшихся после выбрасывания, при котором кривая еще восстанавливается с приемлемой точностью, n — число точек в исходной записи кривой.

3. Экспериментальные результаты

Класс \mathcal{F} в первом варианте нашего алгоритма состоял всего лишь из одного способа — аппроксимации кривой кусочно-постоянной функцией. Иными словами, при удалении каких-либо точек из первоначального набора мы заменяли значения кривой в удаленной точке ее значением в предыдущей точке. Из-за дискретности при поиске наилучшей аппроксимации надо проводить перебор по значению в начальной точке, несмотря на то, что мы используем только один метод аппроксимации. Этот

перебор делается внутри того "окна прореживания", которое в данный момент применяется (т.е. при заданной доле выброшенных точек).

В дальнейшем предполагается включить в класс \mathcal{F} кусочно-полиномиальные функции и аппроксимацию отрезком ряда Фурье по разным ортонормированным системам функций.

Тестирование проводилось на ЭЭГ, зарегистрированной у человека во время сна. Для такой ЭЭГ характерен очень широкий диапазон паттернов, соответствующих различным состояниям нейронов коры больших полушарий мозга [5]. ЭЭГ регистрировалась в правом затылочном отведении с частотой дискретизации 100 Гц.

При просмотре были отобраны 25 безартефактных фрагментов длительностью от 4 до 16 с. (медиана — 8 с.), каждый из которых визуально представлялся сравнительно однородным, но отличался по паттерну от остальных. Показатель сложности рассчитывался в последовательных "окнах" — отрезках длительностью $T=2$ с. Величина погрешности аппроксимации Δ была установлена на уровне 0,32.

Вариативность оценок сложности в "окнах" анализа внутри однородных фрагментов ЭЭГ оказалась значительно ниже вариативности оценок, усредненных по каждому из этих фрагментов: медиана "внутриинтервального" стандартного отклонения была равна 0,0019, тогда как стандартное отклонение (по всем фрагментам) усредненных по фрагменту значений равнялось 0,0083. Оценки сложности особенно сильно различались между 6 фрагментами, имевшими наиболее четкие признаки неглубокого или парадоксального сна (среднее 0,993, стандартное отклонение 0,0004), и четырьмя фрагментами с наиболее четко выраженной мощной дельта-активностью, характерной для третьей и четвертой стадий сна (среднее 0,973, стандартное отклонение 0,009).

Проявившаяся в этих результатах связь между паттерном ЭЭГ и оценками сложности нашла дополнительное подтверждение, когда мы расположили фрагменты ЭЭГ в порядке понижения средней оценки сложности (см. рисунок 1, где в целях экономии места показаны только каждый третий фрагмент и только первые три "окна" длительностью по 2 с.). Средняя оценка сложности (по всем "окнам") для представленных на рисунке фрагментов, обозначенных буквами а-з, была равна, соответственно, 0,9934, 0,9926, 0,9917, 0,9911, 0,9875, 0,9830, 0,9794, 0,9635. Оказалось, что приблизительно в этом порядке наблюдается и углубление сна, если судить по ЭЭГ-признакам (см. на рисунке 1, слева). Динамика единичных оценок сложности (см. в правой части рисунка 1), как правило, также следовала за изменениями в ЭЭГ.

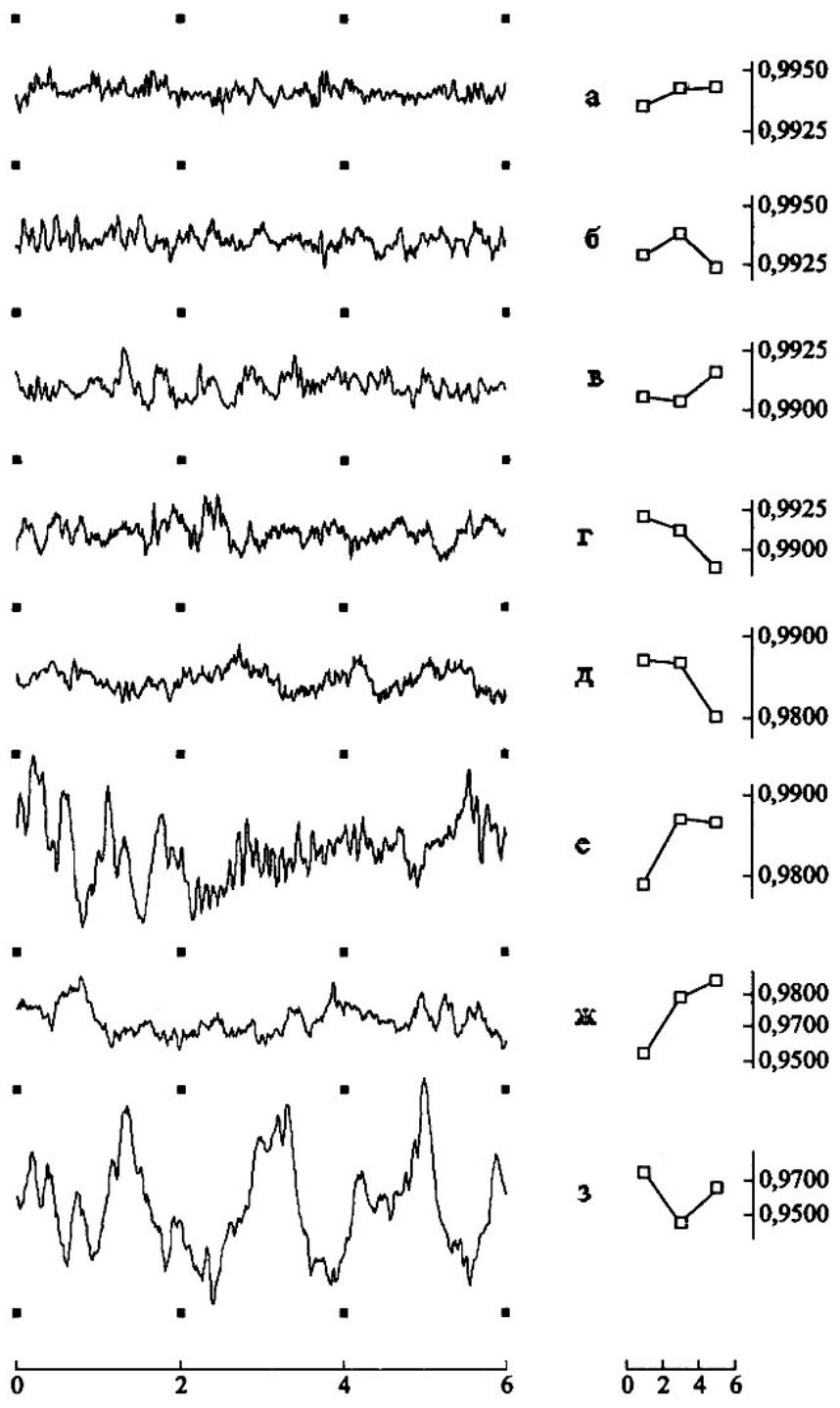
Предложенная нами мера сложности, описанная здесь впервые, уже

в самом простом варианте реализации алгоритма оказалась вполне работающим инструментом, чувствительным к паттерну ЭЭГ. Как и можно было ожидать, оценки сложности падали параллельно со сдвигом ЭЭГ в сторону типично сонного паттерна.

Отметим еще раз, что новая мера сложности представляет собой индивидуальную характеристику конкретной кривой и никак не связана с возможными механизмами ее порождения, что особенно важно в случае ЭЭГ, общепринятой модели генерации которой в настоящее время не существует. Возможность подсчитывать сложность кривой на сегменте произвольной длины позволяет исследователю изучать динамику этого показателя ЭЭГ в разных временных масштабах и, следовательно, анализировать временную иерархию разных функциональных состояний мозга.

Авторы выражают признательность проф. J.Röschke (Университет г.Майнц, Германия) за предоставленные записи сонной ЭЭГ.

Авторы благодарны Ю.С.Попкову за внимание к работе.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Синай Я.Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.
2. *Демидов Е.Е., Даревская Ю.В., Моренков О.А. и др.* Нелинейный корреляционный анализ // Обзорение прикладной и промышленной математики. М.: Изд-во ТВП, 1999. Т.6. Вып.1. С.4-57.
3. *Колмогоров А.Н.* Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 27-36.
4. *Каплан А.Я.* Нестационарность ЭЭГ: методологический и экспериментальный анализ // Успехи физиол. наук. 1998. Т.29. N3. С.35-55.
5. *Steriade M.* Coherent oscillations and short-term plasticity in corticothalamic networks // Trends in Neurosci. 1999. V. 22. No. 8. P. 337-345.

К статье Б.С. Дарховского, А.Я. Каплана, С.Л. Шишкина

Подпись к рисунку

Фрагменты ЭЭГ (а-з) в порядке уменьшения оценки сложности и динамика этой оценки. Слева — ЭЭГ, справа — динамика оценки сложности. Границы окон, в которых оценивалась сложность, отмечены точками для удобства сопоставления ЭЭГ и динамики сложности. Внизу — шкала времени (в секундах).